La Propriété de Markov générale

Soit (X_n) une chaîne de Markov

Lemme : $\mathbb{P}(X_{N+k} \in C \mid X_N = i)$

$= \mathbb{P}(X_k \in C \mid X_0 = i)$

démonstration :

pour $k=2$:

$$\mathbb{P}(X_{N+2} \in C \mid X_N = i) = \frac{\mathbb{P}(X_{N+2} \in C, X_N = i)}{\mathbb{P}(X_N = i)}$$

$$= \frac{\sum_{\ell \in E} \mathbb{P}(X_{N+2} \in C, X_{N+1} = \ell, X_N = i)}{\mathbb{P}(X_N = i)} \quad \text{(formule proba totale)}$$

$$= \sum_{\ell \in E} \mathbb{P}(X_{N+2} \in C \mid X_{N+1} = \ell, X_N = i) \frac{\mathbb{P}(X_{N+1} = \ell, X_N = i)}{\mathbb{P}(X_N = i)}$$

$$= \sum_{\ell \in E} \underbrace{\mathbb{P}(X_{N+2} \in C \mid X_{N+1} = \ell)}\, \mathbb{P}(X_{N+1} = \ell \mid X_N = i)$$

$$= \sum_{\ell \in E} \mathbb{P}(X_2 \in C \mid X_1 = \ell)\, \mathbb{P}(X_1 = \ell \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{\ell \in E} \mathbb{P}(X_2 \in C \mid X_1 = \ell, X_0 = i)\, \mathbb{P}(X_1 = \ell \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{\ell \in E} \frac{\mathbb{P}(X_2 \in C, X_1 = \ell, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_1 = \ell, X_0 = i)} \cdot \frac{\mathbb{P}(X_1 = \ell, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i)}$$

$$= \sum_{l \in E} \frac{\mathbb{P}(X_2 \in C, X_1 = l, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_2 \in C, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} = \mathbb{P}(X_2 \in C \mid X_0 = i)$$

<u>pour $k > 2$</u> <u>idem</u> c'est juste un peu plus compliqué à écrire, par exemple pour $k = 3$

$$\mathbb{P}(X_{N+3} \in C \mid X_N = i)$$

$$= \sum_{(l,m) \in E^2} \frac{\mathbb{P}(X_{N+3} \in C, X_{N+2} = l, X_{N+1} = m, X_N = i)}{\mathbb{P}(X_N = i)}$$

etc...

On retiendra le principe général suivant appelé <u>propriété de Markov générale</u> : <u>Théorème</u>

$$\mathbb{P}(X_{N+k} \in C_k, X_{N+k-1} \in C_{k-1}, \dots, X_{N+1} \in C_1 \mid X_N = i, \cancel{\dots, X_0 = i_0})$$

$$= \mathbb{P}(X_k \in C_k, X_{k-1} \in C_{k-1}, \dots, X_1 \in C_1 \mid X_0 = i)$$

<u>Théorème</u> : Partant d'un point quelconque de l'espace des états, la probabilité de tomber (tôt ou tard) dans l'une des classes minimales, est égale à 1. Si les classes minimales sont des états absorbants, la probabilité de tomber tôt ou tard dans l'un des états absorbants vaut 1

<u>dém^n</u> : Notons B l'ensemble de tous les états des classes minimales. Il suffit de supposer qu'on part d'un point $\notin B$

pour $i \notin B$ soit δ_i <u>la distance de i à B</u>

(= longueur du plus court chemin dans le graphe joignant i à un point de B)

et soit

$$p_i = \mathbb{P}(X_{\delta_i} \notin B \mid X_0 = i)$$

<u>Noter que</u> $\delta_i < +\infty$ et $p_i < 1$ (trivial)

Posons $p = \underset{i \notin B}{\text{Max}}\, p_i$ et $\delta = \underset{i \notin B}{\text{Max}}\, \delta_i$

Considérons les événements

Théorème : Partant d'un point quelconque de l'espace des états, la probabilité de tomber (tôt ou tard) dans l'une des classes minimales, est égale à 1. Si les classes minimales sont des états absorbants, la probabilité de tomber tôt ou tard dans l'un des états absorbants vaut 1

démon : Notons B l'ensemble de tous les états des classes minimales. Il suffit de supposer qu'on part d'un point $\notin B$

pour $i \notin B$ soit δ_i la distance de i à B (= longueur du plus court chemin dans le graphe joignant i à un point de B)

et soit

$$p_i = \mathbb{P}(X_{\delta_i} \notin B \mid X_0 = i)$$

Noter que $\delta_i < +\infty$ et $p_i < 1$ (trivial)

Posons $p = \underset{i \notin B}{\mathrm{Max}}\, p_i$ et $\delta = \underset{i \notin B}{\mathrm{Max}}\, \delta_i$

Considérons les événements

$E_n = [X_{n\delta} \notin B]$ (= on n'est pas encore dans B après $n\delta$ étapes)

$E = \bigcap_n E_n$ = on n'atteint jamais B

Comme $E_{n+1} \subset E_n$ (clair), la suite $E_n \searrow$ donc par continuité de $\mathbb{P}$, on a :

$$\mathbb{P}(E) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(E_n)$$

$\mathbb{P}(E_n)$?

$$\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(X_{n\delta} \notin B) =$$

$$\sum_{i \notin B} \mathbb{P}(X_{n\delta} \notin B, X_{(n-1)\delta} = i) =$$

$$\sum_{i \notin B} \mathbb{P}(X_{n\delta} \notin B \mid X_{(n-1)\delta} = i)\, \mathbb{P}(X_{(n-1)\delta} = i)$$

$$= \sum_{i \notin B} \underbrace{\mathbb{P}(X_\delta \notin B \mid X_0 = i)}_{\leq p_i \leq p \ (*)} \mathbb{P}(X_{(n-1)\delta} = i)$$

$$\leq p \sum_{i \notin B} \mathbb{P}(X_{(n-1)\delta} = i) = p\, \mathbb{P}(X_{(n-1)\delta} \notin B)$$

$$= p\, \mathbb{P}(E_{n-1})$$

Donc $\mathbb{P}(E_n) \leq p\,\mathbb{P}(E_{n-1})$

et par itération :

$$\mathbb{P}(E_n) \leq p^n$$

Donc $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(E_n) = 0 = \mathbb{P}(E)$ cqfd

Détail :

$\circledast$ $[X_\delta \notin B] \subset [X_{\delta_i} \notin B]$

donc

$$\mathbb{P}(X_\delta \notin B \mid X_0 = i) \leq \mathbb{P}(X_{\delta_i} \notin B \mid X_0 = i) = p_i$$